Nos proponemos demostrar el siguiente:

<u>Teorema</u>. Sea f una función invertible. Supongamos que f es derivable en (a,b). Entonces f^{-1} es derivable en $d=f(c)$, $c\in(a,b)$, si y sólo si $f'(c)\neq 0$. Si este es el caso, entonces $(f^{-1})'(d)=\dfrac{1}{f'(c)}$.

Recordemos que f es invertible si y sólo si f es inyectiva y que, si este es el caso, entonces f^{-1} es una función inyectiva cuyo dominio es el rango de f.

Recordemos, así mismo, que f es inyectiva si y sólo si la igualdad $f(x_1)=f(x_2)$ vale únicamente cuando $x_1=x_2$.

<u>Demostración</u>. Sea $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)\neq 0$. Sea $d=f(c)$. Queremos demostrar que

$$\lim_{y\to d}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(d)}{y-d}=\frac{1}{f'(c)}.$$

Sabemos que

$$f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}.$$

Si hacemos $y=f(x)$ entonces $y\to d$ cuando $x\to c$, puesto que f es continua en (a,b) (por ser derivable en (a,b)) y podemos escribir

$$f'(c)=\lim_{y\to d}\frac{y-d}{f^{-1}(y)-f^{-1}(d)}.$$

Como $f'(c)\neq 0$, obtenemos que

$$\lim_{y\to d}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(d)}{y-d}=\lim_{y\to d}\frac{1}{\dfrac{y-d}{f^{-1}(y)-f^{-1}(d)}}=\frac{1}{f'(c)}.$$

Recíprocamente, supongamos que f^{-1} es derivable en $d=f(c)$. Queremos demostrar que $f'(c)\neq 0$.